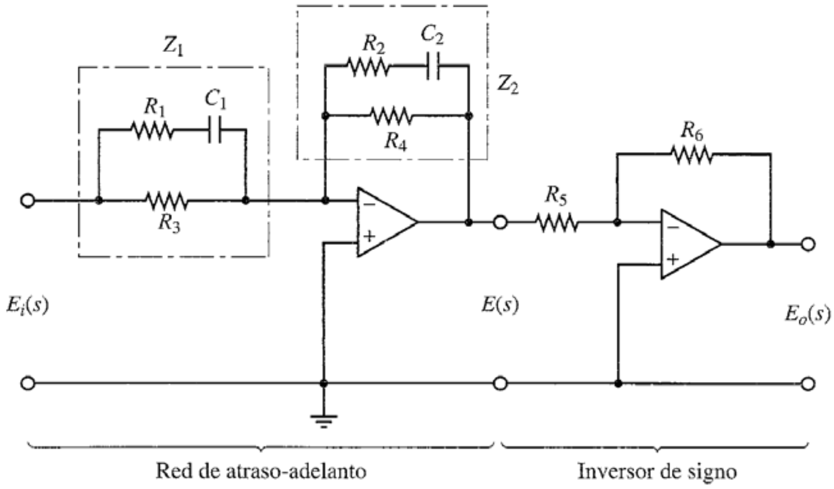
Compensador en atraso-adelanto

por el método de respuesta en frecuencia

Compensador electrónico en atraso-adelanto con amplificadores operacionales



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5}\left[\frac{(R_1+R_3)C_1 s+1}{R_1 C_1}\right]\left[\frac{R_2 C_2+1}{(R_2+R_4)C_2 s+1}\right]$$

$$T_1 = (R_1+R_3)C_1 \quad T_1\alpha = R_1 C_1 \quad T_2 = R_2 C_2 \quad \beta T_2 = (R_2+R_4)C_2$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_c\alpha\beta\left(\frac{T_1 s+1}{\alpha T_1 s+1}\right)\left(\frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1}\right) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)$$

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1+R_3} < 1 \qquad \beta = \frac{R_2+R_4}{R_2} > 1 \qquad K_c = \frac{R_2 R_4 R_6 (R_1+R_3)}{R_1 R_3 R_5 (R_2+R_4)}$$

La compensación de atraso-adelanto combina las ventajas de las compensaciones de atraso y de adelanto.

La compensación de adelanto básicamente acelera la respuesta e incrementa la estabilidad del sistema. La compensación de atraso mejora la precisión en estado estable del sistema, pero reduce la velocidad de la respuesta.

Procedimiento
Determine el valor de *K* para que cumpla con el coeficiente estático de error.

Grafique el diagrama de Bode.
Obtenga el Margen de fase y el Margen de ganancia con sus respectivas frecuencias.

Escoja la nueva frecuencia de transición de ganancia ω_n

Calcule el ángulo necesario ϕ_m que deberá proporcionar el compensador en adelanto, este es

$$\phi_m = -180° - \angle G(j\omega_m) + MF_{esp} + \phi_{adic}$$

(los grados adicionales ϕ_{adic} son aproximadamente 5˚, debido a la caída de ángulo proporcionada por el compensador en atraso).

Si el compensador en adelanto no puede proporcionar este ángulo, porque $\phi_m > 65°$ deberemos escoger otra frecuencia (disminuir la frecuencia) de transición de ganancia. Calcule el factor α y $10\log\alpha$.

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m} \right)$$

El compensador en atraso deberá proporcionar suficiente atenuación para que la magnitud en ω_n sea de $10\log\alpha$.

La atenuación total que deberá proporcionar el compensador en atraso, es la magnitud $\left|G\left(j\omega_m\right)\right|$ más los $10\log\alpha$.

$$20\log\beta = \left|G\left(j\omega_m\right)\right| - 10\log\alpha$$

(Recuerde que el factor β debe ser menor a 17).

Ubique al cero del compensador en atraso una década por debajo de la nueva frecuencia de transición de ganancia ω_n .

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_m}{10}$$

Y al polo como.

$$\frac{1}{\beta T_2}$$

El compensador en adelanto tendrá el cero ubicado en

$$\frac{1}{T_1} = \omega_m \sqrt{\alpha}$$

y el polo en

$$\frac{1}{\alpha T_1}$$

El compensador en atraso- adelanto sería:

$$G_c(S) = \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{1}{\alpha T_1}} \right) \right) \left(\left(\frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{S + \frac{1}{T_2}}{S + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \right)$$

Ejemplo 1

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

$$G(s) = \frac{24K}{s(s+2)(s+6)}$$

Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

El error en estado estable para una entrada rampa con pendiente 2π debe ser menor o iguala $\frac{\pi}{10}$
Un margen de fase $MF \geq 45°$
La frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c \geq 1\ ^{rad}\!/_{seg}$

Solución

El coeficiente estático de error de velocidad del sistema original

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{24K}{s(s+2)(s+6)} = 2K$$

Como se desea que $e_{ss} = \frac{\pi}{10}$ entonces

$$e_{ss} = \frac{R_1}{K_v} = \frac{2\pi}{2K} = \frac{\pi}{K} \text{ por lo que } \frac{\pi}{K} = \frac{\pi}{10} \text{ entonces } K = 10$$

El sistema sería

$$G(s) = \frac{240}{s(s+2)(s+6)}$$

El margen de fase para este sistema es

$$MF = -20.78° \qquad \omega_c = 5.3\ rad/seg$$
$$MG = -7.93\,dB \qquad \omega = 3.47\ rad/seg$$

Se escoge como frecuencia de transición de ganancia la misma que la original o la que se encuentre más cercana a ella

$$\omega_m = 4.7 \qquad \angle G(j\omega_m) = -195° \qquad |G(j\omega_m)| = 2.356\ dB$$

$$\phi_m = -180° - \angle G(j\omega_m) + MF_{esp} + \phi_{adic}$$

[los grados adicionales ϕ_{adic} son aproximadamente $5°$, debido a la caída de ángulo proporcionada por el compensador en atraso, no se proporcionan grados adicionales debido al compensador en adelanto ya que no existe corrimiento de frecuencia].

$$\phi_m = -180° - (-195°) + 45° + 5° = 65°$$

Si el compensador en adelanto no puede proporcionar este ángulo [porque $\phi_m > 65°$] deberemos escoger otra frecuencia (disminuir la frecuencia) de transición de ganancia.

Entonces

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m} \right) = \left(\frac{1 - sen65°}{1 + sen65°} \right) = 0.049$$

$$10 \log \alpha = -13.098 \ dB$$

Para determinar la ganancia que deberá proporcionar el compensador en atraso, recuerde que en la frecuencia de transición de ganancia ω_m se debe de tener una magnitud de $10 \log \alpha$, entonces debemos de bajar la magnitud de $|G(j\omega_m)|$ hasta los $10 \log \alpha$ (Recuerde que el factor β debe ser menor a 17)

$$20 \log \beta = |G(j\omega_m)| - 10 \log \alpha$$

$$\beta = 5.925$$

Con los términos de ω_m, α y β, podemos determinar la ubicación de los polos y ceros del compensador

El cero del compensador en adelanto sería

$$\frac{1}{T_1} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 4.7\sqrt{0.049} = 1.04$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T_1} = \frac{1.04}{0.049} = 21.232$$

El cero del compensador en atraso sería

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_m}{10} = 0.47$$

El polo

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{0.47}{5.925} = 0.079$$

El compensador en atraso-adelanto sería

$$G_c(s) = \left(\frac{(s + 1.04)}{(s + 21.232)} \frac{1}{0.049} \right) \left(\frac{(s + 0.47)}{(s + 0.079)} \frac{1}{5.925} \right)$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso en la nueva frecuencia de transición de ganancia ω_m

$$\angle G_c(j\omega_m) = \tan^{-1} \frac{\omega_m}{0.47} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{0.079} = 84.289° - 89.037° = -4.75°$$

El sistema compensado en atraso-adelanto

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{240}{s(s + 2)(s + 6)} \right) \left(\frac{(s + 1.04)}{(s + 21.232)} \frac{1}{0.049} \right) \left(\frac{(s + 0.47)}{(s + 0.079)} \frac{1}{5.925} \right)$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)G_c(s) = 19.91\, seg^{-1}$$

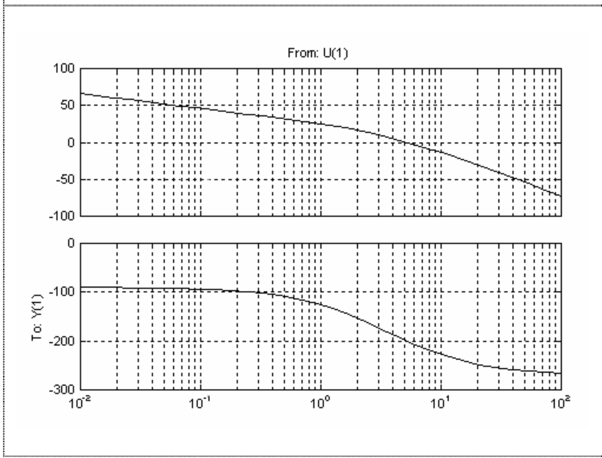
En $\omega_m = 4.7$

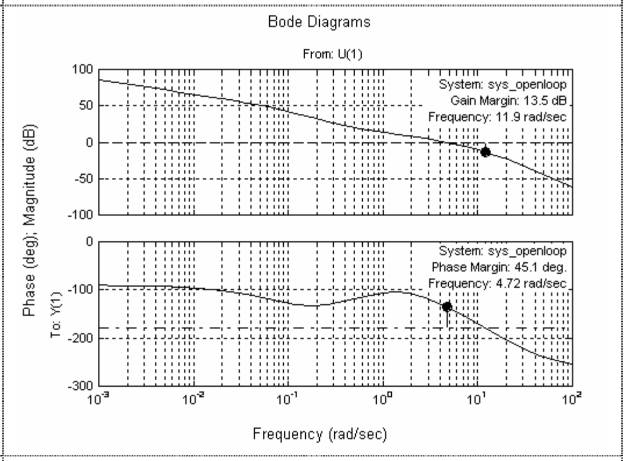
$$\left|G(j\omega_m)G_c(j\omega_m)\right| = 0.043\, dB$$
$$\angle G(j\omega_m)G_c(j\omega_m) = -134.73°$$

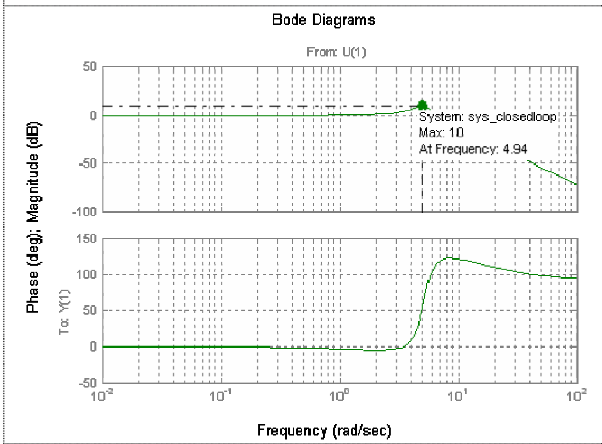
Para el sistema compensado

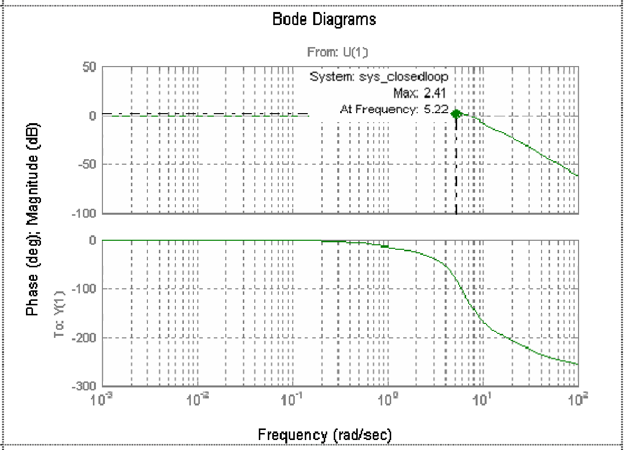
$$MF = 45.1° \qquad \omega_m = 4.72\, rad/seg$$
$$MG = 13.5\, dB \qquad \omega_f = 11.9\, rad/seg$$

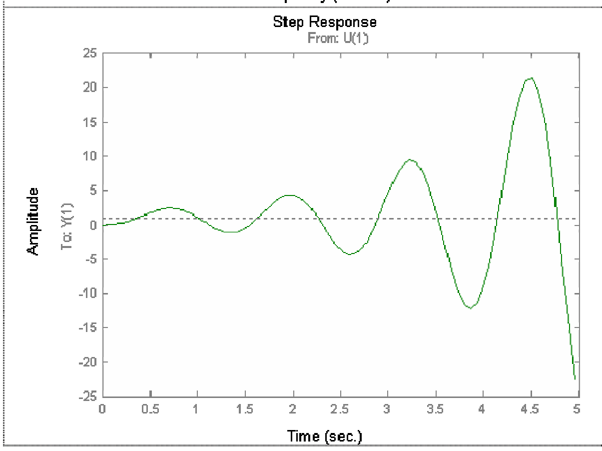
SISTEMA SIN COMPENSAR	SISTEMA COMPENSADO

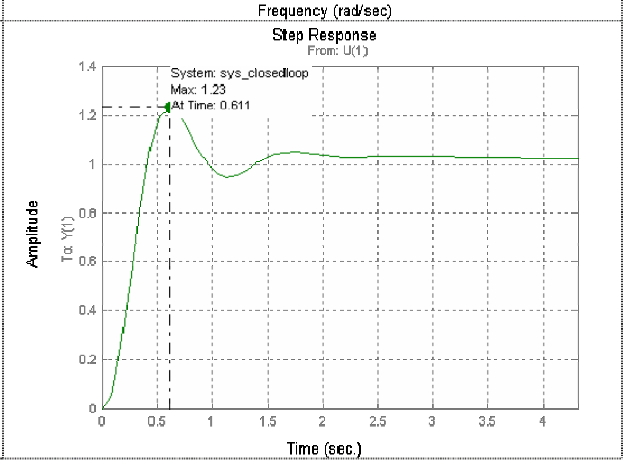












Ejemplo 2

Si seleccionamos una nueva frecuencia de transición de ganancia $\omega_m = 2$

$$\omega_m = 2 \qquad \angle G(j\omega_m) = -153.43° \qquad |G(j\omega_m)| = 16.532\ dB$$

$$\phi_m = -180° - \angle G(j\omega_m) + MF_{esp} + \phi_{adic}$$

$$\phi_m = -180° - (-153.43°) + 45° + 5° = 23.43°$$

Entonces

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m}\right) = \left(\frac{1 - sen\ 23.43°}{1 + sen\ 23.43°}\right) = 0.431$$

$$10 \log \alpha = -3.655\ dB$$

Para determinar la ganancia que deberá proporcionar el compensador en atraso, recuerde que en la frecuencia de transición de ganancia ω_m se debe de tener una magnitud de $10 \log \alpha$, entonces debemos de bajar la magnitud de $|G(j\omega_m)|$ hasta los $10 \log \alpha$ (Recuerde que el factor β debe ser menor a 17)

$$20 \log \beta = |G(j\omega_m)| - 10 \log \alpha = 16.532 + 3.655 = 20.187$$

$$\beta = 10.218$$

Con los términos de ω_m, α y β, podemos determinar la ubicación de los polos y ceros del compensador

El cero del compensador en adelanto sería

$$\frac{1}{T_1} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 2\sqrt{0.431} = 1.313$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T_1} = \frac{1.313}{0.431} = 3.046$$

El cero del compensador en atraso sería

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_m}{10} = 0.2$$

El polo

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{0.2}{10.218} = 0.019$$

El compensador en atraso-adelanto sería

$$G_c(s) = \left(\frac{(s + 1.313)}{(s + 3.046)} \frac{1}{0.431}\right)\left(\frac{(s + 0.2)}{(s + 0.019)} \frac{1}{10.218}\right)$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso en la nueva frecuencia de transición de ganancia ω_m

$$\angle G_c(j\omega_m) = \tan^{-1}\frac{\omega_m}{0.2} - \tan^{-1}\frac{\omega_m}{0.019} = 84.289° - 89.456° = -5.167°$$

El sistema compensado en atraso-adelanto

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{240}{s(s+2)(s+6)}\right)\left(\frac{(s+1.313)}{(s+3.046)}\frac{1}{0.431}\right)\left(\frac{(s+0.2)}{(s+0.019)}\frac{1}{10.218}\right)$$

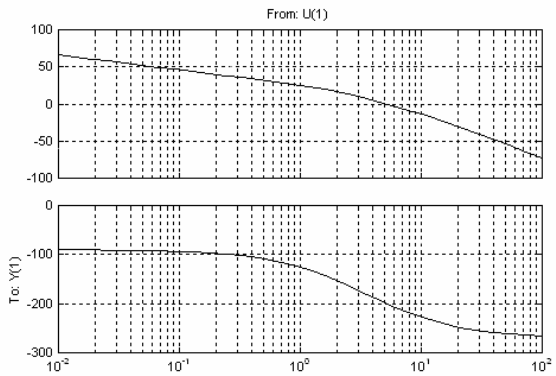
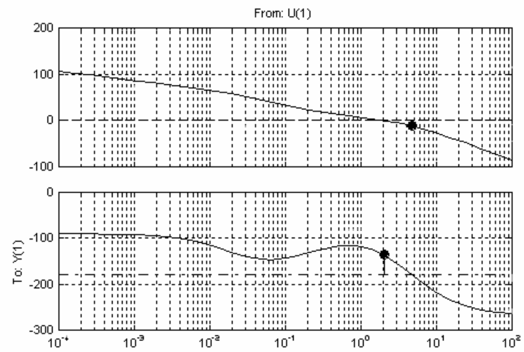
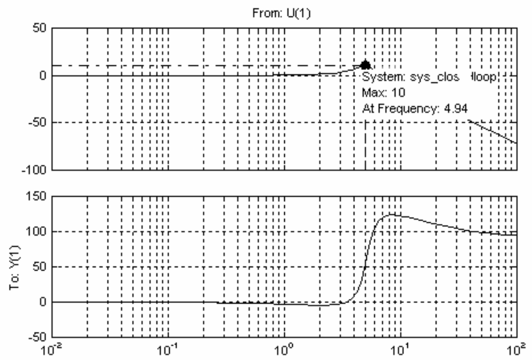
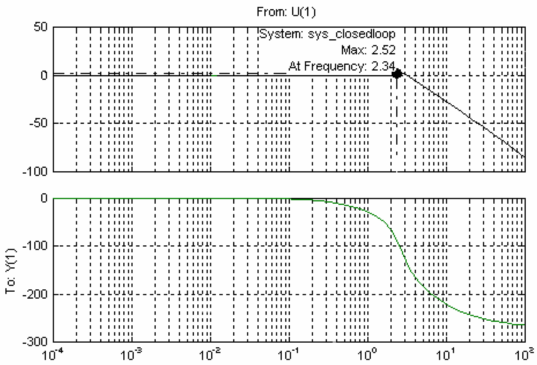
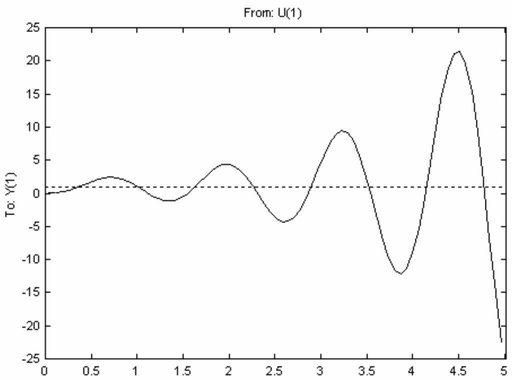
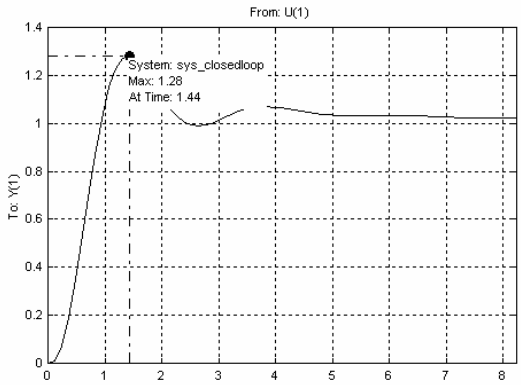
$$K_v = 20.606\ seg^{-1}$$

En $\omega_m = 2$

$$|G(j\omega_m)G_c(j\omega_m)| = 0.043\ dB$$
$$\angle G(j\omega_m)G_c(j\omega_m) = -135.17°$$

Para el sistema compensado

$$MF = 44.82° \qquad \omega_m = 2\ rad/seg$$
$$MG = 11.746\ dB \qquad \omega_f = 4.71\ rad/seg$$

SISTEMA SIN COMPENSAR	SISTEMA COMPENSADO
	
	
	

Ejemplo 3

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

El coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 10\ seg^{-1}$

Un margen de fase $MF = 50°$

Un margen de ganancia de $MG \geq 10\ dB$

Solución

El coeficiente estático de error de velocidad del sistema original

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2}$$

Como se desea que $K_v = 10$ entonces

$$\frac{K}{2} = 10 \text{ por lo que } K = 20$$

El sistema sería

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$

El margen de fase para este sistema es

$$MF = -28.17° \qquad \omega_c = 2.43\ rad/seg$$

$$MG = -10.51 dB \quad \omega_f = 1.41\ rad/seg$$

Se escoge como frecuencia de transición de ganancia

$$\omega_m = 0.5$$

$$\omega_m = 0.5 \qquad \angle G(j\omega_m) = -130.601° \qquad |G(j\omega_m)| = 24.788\ dB$$

$$\phi_m = -180° - \angle G(j\omega_m) + MF_{esp} + \phi_{adic}$$

$$\phi_m = -180° - (-130.601°) + 50° + 5° = 5.601°$$

Entonces

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m}\right) = \left(\frac{1 - sen\ 5.601°}{1 + sen\ 5.601°}\right) = 0.822$$

$$10\log\alpha = -0.8507\ dB$$

Para determinar la ganancia que deberá proporcionar el compensador en atraso, recuerde que en la frecuencia de transición de ganancia ω_m se debe de tener una magnitud de $10\log\alpha$, entonces debemos de bajar la magnitud de $|G(j\omega_m)|$ hasta los $10\log\alpha$ (Recuerde que el factor β debe ser menor a 17)

$$20\log\beta = |G(j\omega_m)| - 10\log\alpha = 24.788 + 0.8507 = 25.639$$

$$\beta = 19.14$$

Como la β es mayor a 17 será necesario aumentar la frecuencia de transición de ganancia ω_m elegida para que aumente el angulo ϕ_m y disminuya la β.

Seleccionamos una nueva frecuencia de transición de ganancia $\omega_m = 1$

$$\omega_m = 1 \qquad \angle G(j\omega_m) = -161.565° \qquad |G(j\omega_m)| = 16.02\ dB$$

$$\phi_m = -180° - \angle G(j\omega_m) + MF_{esp} + \phi_{adic}$$

$$\phi_m = -180° - (-161.565°) + 50° + 5° = 36.565°$$

Entonces

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m}\right) = \left(\frac{1 - sen\ 36.565°}{1 + sen\ 36.565°}\right) = 0.253$$

$$10\log\alpha = -5.969\ dB$$

Para determinar la ganancia que deberá proporcionar el compensador en atraso.

$$20\log\beta = |G(j\omega_m)| - 10\log\alpha = 16.02 + 5.969 = 21.989$$

$$\beta = 12.573$$

Con los términos de ω_m, α y β, podemos determinar la ubicación de los polos y ceros del compensador

El cero del compensador en adelanto sería

$$\frac{1}{T_1} = \omega_m\sqrt{\alpha} = \sqrt{0.253} = 0.503$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T_1} = \frac{0.503}{0.253} = 1.988$$

El cero del compensador en atraso sería

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_m}{10} = 0.1$$

El polo

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{0.1}{12.573} = 0.0079$$

El compensador en atraso-adelanto sería

$$G_c(s) = \left(\frac{(s+0.503)}{(s+1.988)}\frac{1}{0.253}\right)\left(\frac{(s+0.1)}{(s+0.0079)}\frac{1}{12.573}\right)$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso en la nueva frecuencia de transición de ganancia ω_m

$$\angle G_c(j\omega_m) = \tan^{-1}\frac{\omega_m}{0.1} - \tan^{-1}\frac{\omega_m}{0.0079} = 84.289° - 89.547° = -5.258°$$

El sistema compensado en atraso-adelanto

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{20}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{(s+0.503)}{(s+1.988)}\frac{1}{0.253}\right)\left(\frac{(s+0.1)}{(s+0.0079)}\frac{1}{12.573}\right)$$

$$K_v = 10.068\ seg^{-1}$$

En $\omega_m = 1$

$$\left|G(j\omega_m)G_c(j\omega_m)\right| = 0.044\ dB$$
$$\angle G(j\omega_m)G_c(j\omega_m) = -130.23°$$

Para el sistema compensado

$$MF = 49.77° \qquad \omega_m = 1\ rad/seg$$
$$MG = 11.37\ dB \qquad \omega_f = 2.33\ rad/seg$$

SISTEMA SIN COMPENSAR	**SISTEMA COMPENSADO**